IML Institut für Mathematisches Lernen Braunschweig
Beratungs- und Forschungseinrichtung zur Diagnose, Therapie und Prävention der Rechenschwäche

Steinweg 4 ✦ 38100 Braunschweig ✦ Telefon 05 31-12 16 77 50 ✦ Telefax 05 31-12 16 77 59 ✦ E-Mail: IML@zahlbegriff.de

Das Dezimalsystem

Dr. Michael Wehrmann,
Institut für Mathematisches Lernen Braunschweig

Probleme über Probleme

An unserem Institut treffe ich seit Jahren auf Lernende mit Mathematikproblemen unterschiedlichster Couleur. Die Verständnisschwierigkeiten reichen manchmal gar bis in den vorschulischen Bereich zurück. Etlichen Kindern mangelt es an einem kardinalen Zahlbegriff, was man daran sehen kann, dass sie $8-7$ nur mit den Fingern rückwärts zählend bewältigen können. Rechenschwache Kinder sind oft Meister des Zählens. In dieser Sackgasse des zählenden Rechnens verbleiben sie nicht selten durch intensives häusliches Üben oder konventionelle Nachhilfe.

Was ich bei den meisten meiner untersuchten Schüler in irgendeiner Form feststelle sind „Verständnisprobleme beim Zehnerübergang“. Offensichtlich sind solche Fälle, bei denen jede Rechnung rein zählend abgearbeitet wird. Weniger klar sind diejenigen Fälle, bei denen die Kinder – oberflächlich betrachtet – korrekt vorgehen: Eine Zehnerstange wird vorschriftsmäßig in zehn Einerwürfel eingetauscht oder an anderer Stelle werden die schriftlichen Rechenverfahren inklusive der „Merk-Einsen“ fehlerfrei reproduziert. Letzteres geht oft mit einer Leistungsverbesserung in der zweiten Hälfte der dritten Klasse einher und der Fehlschluss lautet, jetzt habe es endlich „klick!“ gemacht. Im Verfahren der qualitativen Förderdiagnostik legen die Kinder mit der„Methode des lauten Denkens“ ihre Kopfrechenstrategien offen. Der geschulte Diagnostiker erkennt dann so manches Mal einen rein schematischen Umgang mit Zifferngebilden. Die Schüler haben zwar mechanistisch bestimmte Verfahrensvorschriften eingepaukt, doch Fragen wie „Wie viel fehlt von 63 bis 100?“ oder „Was ist die Hälfte von 70?“ können sie damit nicht beantworten.

Historie und Nutzen

Dezimalzahlen, genauer: natürliche Zahlen in ihrer dezimalen Darstellungsform, sind eine gedankliche Errungenschaft der Menschheitsgeschichte. Bereits die „alten Ägypter“ kannten eine dezimale Notationsform für Anzahlen und verwendeten verschiedene der Anschauung entlehnte Symbole für eins, zehn, hundert usw. Für 350 notierten sie dreimal das Symbol für hundert und fünfmal dasjenige für zehn.[1] Der historischen Entwicklung

(Quelle: de.nextews.com/e1962c12)

1) vgl. Ifrah, G.: Universalgeschichte der Zahlen, Frankfurt/M. (Campus) 1986

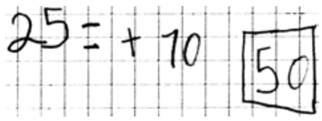
kann man entnehmen, dass die dezimale Bündelung eine gedankliche Leistung ist, die für sich zu würdigen und zu erklären ist. Keinesweg ist sie automatisch an die Darstellung mit Ziffern in einem Stellenwertsystem gebunden. Das uns geläufige Ziffern-Positionssystem ist etwa 1.500 Jahre alt und stammt aus Indien – der Name „arabische“ Zahlen verdankt sich derjenigen Kultur, die es in den Westen brachte.

Dezimalzahlen sind eine praktische, systematische und effektive Art, (auch große) Quantitäten kompakt zu verschriften. Dafür wird ein überschaubarer Zeichenvorrat genutzt, die Ziffern 0 bis 9, welche wiederkehrend an verschiedenen Positionen eingesetzt werden. Die Ziffern stehen stets für denselben Wert und es wird mit ihnen deshalb stets auf dieselbe Art und Weise verfahren, was sich mit „gerechnet wird immer nur bis zehn“ zusammenfassen lässt. Durch die Position wird dann der Ziffernwert mit dem Stellenwert verknüpft.

Was macht das Dezimalsystem für manche so schwer begreifbar?

(Quelle: www.arbeitskreis-lernforschung.de)

Wenn sich Schüler den Bereich bis zehn inklusive der Addition und der Subtraktion nicht verständig erarbeitet haben, macht es keinen Sinn, den Bereich zu überschreiten und bis hundert zu gehen: Ohne ein basales Zahlverständnis bleibt den Kindern nur die Möglichkeit, ihre bisherigen Subjektivismen mehr schlecht als recht auf den höheren Bereich zu übertragen.



(Quelle: www.zahlbegriff.de)

Die Logik des Dezimalsystems hat ihre eigenen Tücken. Es stehen im Zahlsymbol aufgereiht Ziffern nebeneinander, was manches Kind zur Aussage verleitet „Die ‚25‘ besteht aus zwei Zahlen [sic!], die Zwei und die Fünf!“ Dieser Schüler kennt einstellige Zahlen und ist der Auffassung, jetzt seien einfach mehrere solche „Zahlen“ nebeneinander zu verarbeiten, die Ziffern im Zahlsymbol sind für ihn gleichwertig. Der Nutzen des Dezimalsystems besteht allerdings darin, dass zu den Ziffernwerten über ihre Position die Stellenwertigkeit hinzutritt. Das ist eine spezielle gedankliche Abstraktion, die es erstmal zu begreifen gilt.

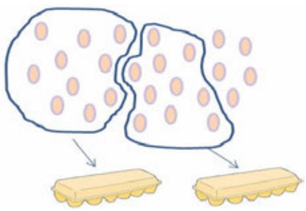
I. Das Fundament in der Grundschule

Die Entwicklung des kardinalen Zahlbegriffs beruht auf Wahrnehmungsleistungen und deren kognitiver Verarbeitung. Aufbauend auf einem basalen Mengenbewusstsein müssen Schüler Zahlen über einen Begriff der Anzahl verstehen lernen. Natürliche Zahlen sind die allgemeine Vorstellung von Anzahl, da sie die Anzahl von Objekten in einer Menge bedeuten. Ihnen liegt als Einheit das Einfache, die Eins, zu Grunde. Ihre Gemeinsamkeit besteht im Ausdrücken von Vielfachen der Eins, ihre Besonderheit ist die jeweils bedeutete Anzahl. Salopp kann man das Prinzip des kardinalen Zahlbegriffs mit „alle Zahlen sind Einsen“ ausdrücken, dies weist auf den inkrementellen Zahlaufbau hin: $4 = 1 + 1 + 1 + 1$. Die Einheit eins muss, selbst bei der Zahl null, stets mitgedacht werden. Damit sind Zahlen miteinander vergleichbar, zerlegbar und zusammenbaubar. Dies mündet in das Wissen, dass Zahlen aus Zahlen zusammengesetzt sind: $8 = 5 + 3$. Die verständig verinnerlichten Zahlzerlegungen sind *das* Fundament für ein zählfreies Rechnen.

Die neue Einheit Zehner

Das Dezimalsystem führt, aufbauend auf diesem kardinalen Zahlverständnis, eine *neue Einheit* ein. Zehn werden gebündelt zur neuen Einheit *ein Zehner*. Im Dezimalsystem erhält die ursprüngliche implizite Einheit eins den neuen Namen „Einer“. Es werden also *zehn Einer* gebündelt zu einem Zehner.

Ein Einer ist identisch mit der Zahl eins. Ein Zehner hingegen ist *nicht* dasselbe wie zehn Einer, wenn auch gleich viel. Diese Ambivalenz ist das basale Grundprinzip des Dezimalsystems, das es zu erarbeiten gilt. Ein Zehner heißt nicht deshalb „Zehner“, weil er zehn Einer enthält, sondern weil er aus zehn Einern entstanden ist. Veranschaulichen lässt sich das gut, indem man zehn Einerwürfel neben eine Zehnerstange legt. Links und rechts liegt nun wirklich nicht dasselbe – auf der einen Seite sind es zehn kleine Würfelchen, auf der anderen eine Stange.



(Quelle: grundschule-kapiert.de)

Es ist nicht damit getan, einzuüben, dass immer, wenn zehn Einerwürfel auf dem Tisch liegen, diese gegen eine Zehnerstange eingetauscht werden oder umgekehrt, wenn die Einer für die Subtraktion nicht ausreichen, ein Zehner aufgelöst wird. Dies kann, wie das Füllen von Eierkartons, zu einer reinen Handlungsvorschrift verkommen, die dann womöglich beim Weglassen des Materials vor dem geistigen Auge weitergeführt wird, ohne dass dem Schüler etwas über die Wertigkeit des Zehners klar geworden ist.

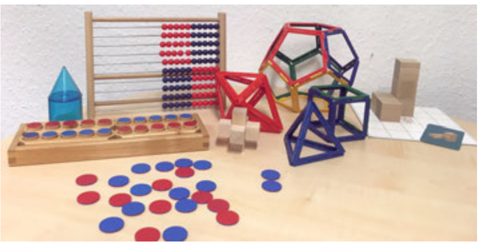
Ziffernwert, Stellenwert und Zahlenwert

(Quelle: www.manutan.de)

Manchen Kindern erscheint der Umgang mit den Ziffern im Zahlsystem als ein Hexenwerk. „Erläuterungen“ wie die folgende höre ich gelegentlich bei der Einführung zweistelliger Zahlen und sie tragen mit Sicherheit dazu bei: „Wandert die ‚2‘ von der Einerstelle auf die Zehnerstelle, meint sie auf einmal eine zwanzig!“ Dies ist keine hilfreiche Aussage, denn hier wird gleich auf den Wert der gesamten Zahl hingewiesen, ohne zu erläutern, *wie* dieser Wert überhaupt zustande kommt. Einem Lernenden, der so mit dem Dezimalsystem konfrontiert wird, muss dies vorkommen wie Zauberei. Auch das Hantieren mit Magnetziffern ist für eine Erklärung wenig hilfreich: Auf eine „20“ wird vorbereitend auf die Einerstelle die Ziffer „5“ geheftet. Diese Zahl „25“ wird dann „erklärt“, indem die „5“ beiseite genommen wird und sich darunter, wie durch Zauberhand, die bislang verborgene „20“ offenbart. Mehr als eine begriffslose Vorlesehilfe des Zahlsymbols („fünf“-und-„zwanzig“) stellt so etwas jedoch nicht dar.

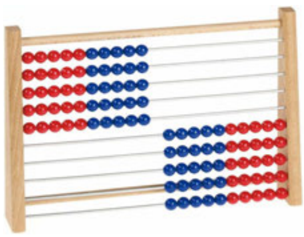
Die Ziffer „2" ändert ihren Wert jedoch nicht, sie hat vielmehr *immer* den Wert zwei. Dies versteht man unter dem *Ziffernwert*. Hinzu tritt der *Stellenwert*, dieser ergibt sich über die *Position* der Ziffer im Zahlsymbol. Der Stellenwert der Zehnerstelle ist zehn, der der Einstelle ist eins. Steht die Ziffer „2" auf der Zehnerstelle, meint sie zwei Zehner. Die Zahl 25 kann man aufgesplittet notieren als $25 = 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1$. Es geht nun nicht darum, diese Gleichung mit den Kindern zu besprechen, sondern sie dient uns der Verdeutlichung dessen, was erarbeitet werden muss: Anzahl und Einheit, Ziffernwert und Stellenwert. Die Zahl 25 besteht aus zwei Zehnern und fünf Einern. Der Term $2 \cdot 10$ steht für zwei Zehner, $5 \cdot 1$ für fünf Einer.[2] In der Gleichung bekommt der Ausdruck $5 \cdot 1$ zusammen mit den Zehnern $2 \cdot 10$ einen zusammenhängenden Sinn: Das „$\cdot$ 1" weist auf die Einer hin – in Abgrenzung zu den neu hinzugetretenen Zehnern, die mit $\cdot$ 10 gekennzeichnet werden. Erst wenn der Zahlenwert 25 als separate Bilanzierung von zwei Zehnern und fünf Einern über die Logik von Anzahl Ziffernwert und Einheit Stellenwert als *eine* Zahl gedacht wird, ist ein dekadischer Zahlbegriff ausgebildet.

Veranschaulichung – der gedankliche Weg von der Menge zum Symbol



(Quelle: www.uni-potsdam.de/gsp-mathematik)

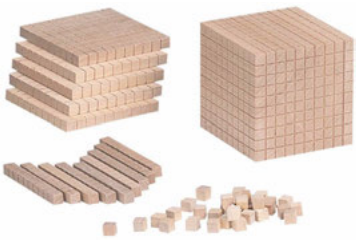
Veranschaulichungsmaterial spricht nie für sich selbst. Im Lerndialog müssen sich Schüler vielmehr über eine angeleitete *reflektierte Materialhandlung* Zusammenhänge über Quantitäten und deren Veränderung erschließen. Im Fall des Zehnersystems ist dies die Logik des Stellenübergangs. Daher ist es elementar, mit den Kindern über den Einheitenwechsel explizit zu sprechen. Es muss am Material erläutert werden, dass und wie beim Bündeln ein Zehner entsteht bzw. aufgelöst wird. Kinder müssen nachvollziehen, dass etwas Neues mit höherer Wertigkeit entsteht, dem ein neuer Name zugewiesen wird. Am Veranschaulichungsmaterial muss sich die neue Einheit daher auch als separates Objekt zeigen.



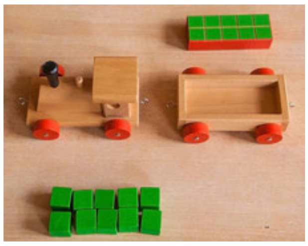
(Quelle: www.betzold.de)

Nicht gut geeignet ist ein Rechenrahmen (fälschlicherweise gerne auch „Abakus" genannt), da die Bündelung damit nur implizit gezeigt werden kann, indem man zehn einzelne Perlen nach rechts schiebt – es bleiben jedoch schlichtweg Einer. Zudem ist der Rechenrahmen unpraktisch beim Rechnen bis hundert: Zur Darstellung von $38 + 27$ muss man sich schon ziemlich verrenken und dabei die sinnvollen Schritte des Kopfrechnens verlassen: Erst den Zehner voll machen, dann die Zehner dazu und schließlich die restlichen Einer verarbeiten ist keine anzustrebende Strategie.

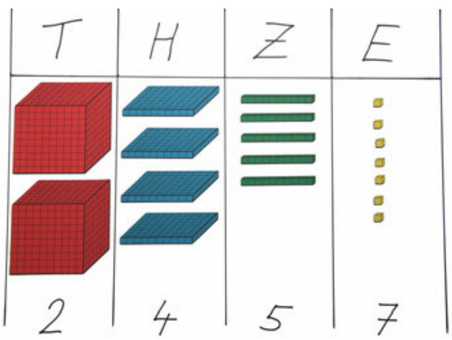
2) Betrachtet man den Term $5 = 5 \cdot 1$ isoliert, so verweist er auf den inkrementellen Aufbau der Kardinalzahlen ($5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$), ist also nicht tautologisch.


(Quelle: www.betzold.de)

Strukturiertes Material, das die Bündelung explizit zeigt, ist wesentlich besser geeignet. Notwendigerweise muss sich die Bündelung in einem Austausch (zehn Einer werden zu einem Zehner) ausdrücken. Etabliert haben sich dafür die Systemblöcke nach Zoltán Pál Dienes,[3] bestehend aus gleichfarbigen Einerwürfeln, Zehnerstangen, Hunderterplatten und dem Tausenderwürfel. Einer Zehnerstange sieht man an ihren Einkerbungen noch an, dass sie aus zehn Einerwürfeln entstanden ist. Einen Abstraktionsschritt weiter geht der Rechenzug von Reinhard Kutzer.[4] Zehn grüne Einerwürfel füllen in Form eines Zehnerfeldes einen Wagen. Der Austausch erfolgt gegen einen Zehnerblock. Dieser ist auf der einen Seite ebenfalls grün und weist (ähnlich wie die Dienes-Zehnerstangen) Einerkerbungen auf, um darauf hinzuweisen, wie er entstanden ist. Wird der Zehnerblock umgedreht, verschwinden die Kerben und die Farbe wechselt zudem zu rot. Beides unterstreicht den Einheitenwechsel.


(Quelle: www.best-sabel.de)

Erscheint der Zehnerblock des Kutzer-Rechenzuges, wenn er auf die rote Seite umgedreht wird, als *ein* Ding, das *einen* Zehner repräsentiert, entspricht seine Größe noch der von *zehn* Einerwürfeln – beides füllt einen Zehnerwagen genau aus. Vor der Einführung der Dezimalzahlsymbole bietet sich daher ein weiterer Abstraktionsschritt an: In Anlehnung an Kutzers Farbgebung kann man grüne und rote Plättchen mit der Wertigkeit Einer und Zehner verknüpfen. Die Plättchen für Einer und Zehner haben die gleiche Größe, ihre bedeutete Wertigkeit wird nurmehr durch ihre Farbe ausgedrückt. Dies ist in seiner Logik der eingangs erwähnten ägyptischen Zahldarstellung verwandt. Eine praktische Anwendung kann dies bei Würfelspielen finden, um den Überblick zu behalten, wie viele Punkte man bereits erzielt hat.



(Quelle: www.spielundlern.de)

Möchte man auf dem Weg hin zum Ziffern-Positionssystem bereits auf die Positionen der Einer- und Zehnerziffern im Zahlsymbol hinweisen, so kann man diese Plättchen oder auch die Systemblöcke in ein Stellenwertregal mit beschrifteten Fächern für Hunderter, Zehner und Einer einlegen oder sich ein solches auf Papier zeichnen. Es sind zudem magnetische Versionen des Materials im Handel erhältlich.

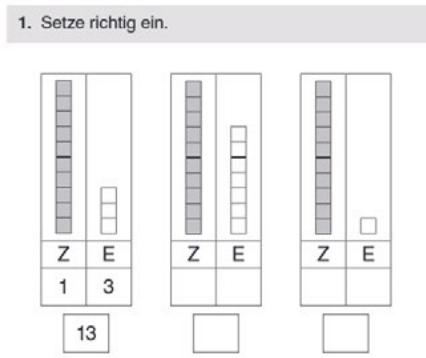
3) vgl. Dienes, Z. P.; Golding, E. W.: Menge – Zahl – Potenz, Freiburg (Herder) [3]1970

4) vgl. Kutzer, R.; Bagus, G.; Freise, B.; Herzberg, H.; Kutzer, G.; Müller, H.: Mathematik entdecken und verstehen (Schülerband 2), Frankfurt/M. (Diesterweg) [2]1995 *sowie* Kutzer, R.; Bagus, G.; Kutzer, G.; Müller, H.: Mathematik entdecken und verstehen (Lehrerband 2), Frankfurt/M. (Diesterweg) 1985

Wechsel zwischen Veranschaulichung, Zahlwort und Zahlsymbol

Bei der Darstellung von Zahlen haben wir es neben der Veranschaulichung mit Zahl*worten* und Zahl*symbolen* zu tun. Zwischen diesen drei Ebenen müssen Schüler flexibel hin und her wechseln können. Leider geben sich Schulwerke nicht immer große Mühe, dies sauber einzuführen bzw. systematisch zu bewältigen.

Rechenschwache Kinder verschriften zweistellige Zahlen oft lautgetreu, d. h. sie bringen zunächst den zuerst gehörten Eineranteil („fünf…") als Ziffer zu Papier und im Anschluss den danach vernommenen Zehneranteil („…und zwanzig"). Vollziehen Schüler dies strikt in lateinischer Schreibrichtung, landet das falsche Zahlsymbol auf dem Papier: „fünfundzwanzig" wird zu „52". Um diesen Fehler zu vermeiden, greifen Lernende – womöglich angeregt durch häusliches Üben – oft zu einer Kompensationsstrategie: Die Einerziffer kommt nach wie vor als erstes zu Papier, doch die Zehnerziffer landet asynchron zur lateinischen Schreibrichtung *links* daneben – etwas Platz wurde dafür gelassen. Dies zeigt, dass eine korrekte Verschriftung nicht unbedingt mit einem Dezimalzahlverständnis einher gehen muss.



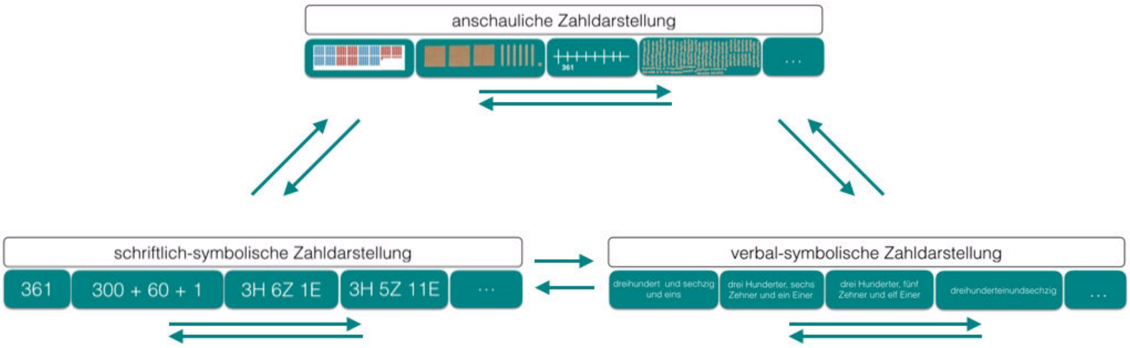
(Quelle: www.finken.de)

Diesem „Problem" widmet sich allen Ernstes ein Verein, der für die Änderung der deutschen Sprache plädiert.[5] Man solle künftig – wie im angelsächsischen Sprachraum – „zwanzigeins" statt „einundzwanzig" sagen. Eine Hilfe wäre dies allerdings nur dafür, dass rechenschwache Kinder schneller das richtige Zahlsymbol zu Papier bringen – ihr Unverständnis des Zahlsystems bliebe damit aber konserviert. Einer ähnlichen Logik folgen heute etliche Schulbücher, wenn Abbildungen von strukturiertem Material mit dem Zahlsymbol versehen werden sollen. Die Zehnerstangen liegen stets auf der linken Seite, die Einermenge ist rechts daneben zu sehen, so dass ein Schüler mit etwas Übung auch ohne Zehnerverständnis die richtigen Zahlsymbole in den darunter vorgegebenen Kästchen notieren kann. Dies sind Aufgaben, die einen puren Schematismus einüben.

Wie ist nun der Ebenenwechsel stattdessen sinnvoll zu bewältigen? Den obigen Beispielen ist gemein, dass stets auf einen *unmittelbaren* Wechsel von einer Ebene zur nächsten abgezielt wird, bei der Vereinsinitiative vom Wort zum Symbol, bei den Arbeitsblättern von der Menge zum Symbol. Und genau da liegt das Problem. Was fehlt, ist der nötige Zwischenschritt über das *Zahlverständnis*. Egal, bei welcher Darstellungsform wir beginnen – Mengendarstellung, Zahlwort oder Zahlsymbol – zunächst muss eine geistige Sortierung der bedeuteten Anzahl erfolgen. Dies ist eine *logische* Einordnung und keine *räumliche*. Diese Vorstellung kennt kein „links" oder „rechts", sondern besteht in der Bilanzierung „wie viel von was?", also wie viele

5) Zwanzigeins e. V., im Internet zu finden unter https://zwanzigeins.jetzt

von den Einern und wie viele von den Zehnern. Erst wenn diese Bilanzierung gedanklich gelingt, kann der saubere Wechsel auf die Zielebene erfolgen. Hierfür muss man wissen, wie die Zahlwörter aufgebaut sind (man spricht den Eineranteil zuerst) und wie die Zahlsymbole verschriftet werden (die höherwertigere Ziffer – also der Zehner – wird zuerst geschrieben). Beim Material spielt die Anordnung keine Rolle – allenfalls sollte Gleiches bei Gleichem liegen, also jeweils die Einerwürfel und die Zehnerstangen zusammen.

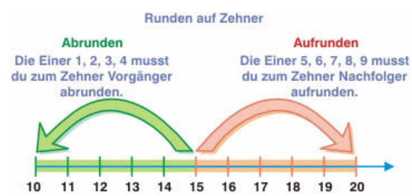


(Quelle: www.pikas-mi.dzlm.de/download/file/fid/3536)

Dies gilt natürlich genauso umgekehrt, wenn der Ausgangspunkt die Mengendarstellung ist: Die Einer können links vom Zehner ebenso liegen wie rechts oder auch darüber. Haben die Kinder bereits genügend Englisch in der Schule gelernt, kann man durchaus einen Ausflug zu den englischen Zahlwörtern machen. Nicht, um die Schüler zu verwirren, sondern um das Nachdenken über das „wie viel von was?“ anzuregen, die starre Links-/Rechts- (bzw. Vorher-/Nachher-) Zuweisung aufzubrechen und so eine stabile stellenübergreifende Zahlvorstellung auszubilden.

***Exkurs:* Runden**

Zum Dezimalzahlverständnis gehören Nachbarschafts- und Lagebeziehungen. Kinder müssen in der Lage sein, durch Runden die ungefähre Größe einer Zahl angeben zu können. Zu den bisher bekannten Vergleichssymbolen $<$, $>$ und $=$ tritt ein viertes Symbol hinzu: $27 \approx 30$, in Worten: „siebenundzwanzig ist ungefähr gleich viel wie dreißig“.



(Quelle: www.kleineschule.com.de)

Wird die Thematik Runden nur über die Anwendung der Rundungsregeln besprochen, erscheint es Kindern als zusätzlich zu bewältigende Aufgabe, manche begreifen Runden gar als eine neue Rechenart. Die Vorschrift „Ab fünf wird aufgerundet!“ steht als inhaltsleere Merkregel einer nachvollziehbaren Erklärung der Rundungsregeln im Weg. Stattdessen sollte über den *Abstand* der Zahlen gesprochen werden. Es wird der *nächstgelegene* Zehner gesucht, was sich am Zahlenstrahl veranschaulichen lässt. Um 47 zu runden, steht am Anfang die Aussage „47 liegt zwischen 40 und 50“. Danach wird über den Abstand zu den beiden Nachbarzehnern gesprochen, diese werden verglichen und der nächstgelegene Zehner bestimmt.

Ein Sonderfall sind die Zahlen in der Mitte. Zu 35 lässt sich kein eindeutig nächstgelegener Zehner bestimmen, da beide Nachbarn gleich weit entfernt sind, jeweils fünf. An dieser Stelle benötigen wir eine Regel, die sich nicht aus der Arithmetik ableiten lässt. Bei uns ist es üblich, bei Zahlen, die in der Mitte liegen, stets auf den nächstgrößeren Zehner zu runden. Eine mathematische Notwendigkeit dafür gibt es nicht – es ist sogar ungünstig: Denn wenn mit auf solche Art gerundeten Zahlen weiter gerechnet wird, verfälscht sich das Ergebnis immer mehr in die größere Richtung.

Ein anderer Sonderfall betrifft „glatte Zehner". Ich kenne Schüler, die z. B. bei 40 mit der Merkregel „Bis ‚4' rundet man ab!" auf die Einerziffer „0" blicken und dann auf 30 „abrunden". Andere Kinder sagen, 40 könne man gar nicht runden, weil es ja schon ein Zehner sei. Beiden ist die (falsche) Vorstellung gemein, eine Zahl müsse beim Runden stets verändert werden. Stattdessen sollte man auch hier nach dem nächstgelegenen Zehner fragen. Die Antwort lautet: Es ist er selbst, der Abstand ist null.

Sinnvolle Bewältigung des Zehnerübergangs

Wähle deinen Rechenweg.

① 56 + 28 =	④ 53 + 12 =
② 12 + 27 =	⑤ 13 + 35 =
③ 47 + 23 =	⑥ 45 + 24 =

(Quelle: Keller/Pfaff: Das Mathebuch 2)

Eine dekadische Zahlvorstellung muss, wie eben dargelegt, ausgebildet sein, bevor man mit diesen Zahlen rechnet. Ein in manchen Schulbüchern gewählter didaktischer Ansatz ist, Kinder das Rechnen über den Zehner „selbst entdecken" zu lassen verbunden mit der Aufforderung „Rechne auf deinem Weg!". Aus lerntherapeutischer Sicht ist dies katastrophal. Denn ungeachtet der arithmetisch-rechnerischen Entwicklung des Kindes stehen damit alle Möglichkeiten, den Zehner zu überschreiten, gleichwertig und gleichgültig nebeneinander.[6]

Die Aufgabe der Lehrperson muss es jedoch sein, die „Wege" der Kinder zu analysieren und danach zu bewerten, ob und inwiefern sich darin Kenntnisse über die Bündelungsstruktur der dezimalen Darstellungsform widerspiegeln, und ihnen ggf. helfen, diese zu erlangen. Als stabile, der Logik des Zahlsystems entsprechende und umkehrbare Vorgehensweise bietet sich das klassische Teilschrittverfahren an:

$$7 + 8 \;=\; 7 + (3 + 5) \;=\; (7 + 3) + 5 \;=\; 10 + 5 \;=\; 15$$

Hier wird die Bündelung, also der Stellenübergang, explizit vollzogen. Die Zahlzerlegungen aller Zahlen bis zehn müssen vorab verständig erarbeitet und automatisiert abrufbar sein. Andere Wege über den Zehner, wie das Nutzen von Verdopplungen ($7 + 8 \;=\; 7 + 7 + 1$), mögen arithmetisch zwar korrekt sein, sind aber aus dem Blickwinkel der dekadischen Logik eine *Umgehung* des expliziten Stellenübergangs – diesen dürfen wir den Kindern nicht ersparen, sondern müssen ihn ermöglichen.

6) Nimmt man „Rechne auf deinem Weg!" ernst, so müsste streng genommen auch das Zählen als „Weg" zugelassen werden – doch dass zählendes Rechnen keine anzustrebende Vorgehensweise ist, hat sich auch unter Schulbuchautoren schon herumgesprochen.

Die Vorgehensweise, eine Zahl in ihre Ziffern zu zerlegen und diese separat zu verrechnen, wird häufig toleriert (wenn nicht sogar gefördert), um schnell richtige Ergebnisse zu erzielen. Aus didaktischer Sicht ist dies nicht empfehlenswert. Neben der Tatsache, dass die Kinder beim Stellenübergang, spätestens bei der Subtraktion, erhebliche Probleme bekommen, sollte man sich vorlegen, dass ein stellenwertübergreifendes Verständnis zweistelliger Zahlen die Basis des Kopfrechnens sein muss – ob mit oder ohne Stellenübergang. Auch bei $34 - 21$ ist der anzustrebende erste Rechenschritt $34 - 20$ und nicht $30 - 20$, wie im folgenden ausgeführt wird.

Komplexitätsstufen beim Rechnen bis hundert

In didaktischen Werken wird in der Regel lediglich unterschieden zwischen Rechnen mit und ohne Zehnerübergang. Diese rein formelle Unterscheidung wird den Anforderungen des Begreifens des Zahlbereiches bis hundert nicht gerecht. Im folgenden werden stattdessen sieben Komplexitätsstufen dargelegt, die verstanden sein müssen, um sicher im Kopfrechen zu werden. Es handelt sich um eine logische Übersicht und sollte nicht als chronologische Übungsanleitung verstanden werden.

- An erster Stelle stehen Einer-/Zehner-Zusammenfügungen und -Trennungen der Art $20 + 4$, $3 + 70$, $64 - 4$ und $53 - 50$. Diese Aufgaben erfordern noch kein Verändern von Ziffernwerten, sondern beziehen sich auf den dekadischen Zahlaufbau. Erst wenn sie gelingen, macht es Sinn, im Anschluss auch Rechnungen mit Veränderungen durchzuführen.

- Rechnungen sollten zunächst *eine* Veränderung bewirken, exemplarisch sind $26 + 3$, $4 + 42$, $54 + 30$, $50 + 14$, $84 - 2$ und $76 - 50$. Wichtig ist der Blick darauf, an welcher Stelle sich etwas verändert. Die Operanden dürfen dabei nicht in ihre Ziffernwerte zerlegt werden.

- Der nächste Schritt besteht im Vollzug von *zwei* Veränderungen, wie in den Beispielen $34 + 25$ und $65 - 13$. Hier wird ein Plan nötig in der Form „Was mache ich zuerst?". Es bietet sich auf Grund der lateinischen Schreibrichtung und im Kontrast zu den schriftlichen Verfahren an, mit den Zehnern des zweiten Operanden zu beginnen. Es müssen – wie bei allen folgenden Stufen – die Fragen gestellt und beantwortet werden „Was habe ich schon getan?" und „Was muss ich noch tun?". Wie bereits angemerkt, soll von Anfang an auf einen stellenwertübergreifenden Umgang mit den Zahlen abgezielt und nicht stellenseparierend vorgegangen werden. Die Rechenschritte der beiden Beispielaufgaben lauten damit $34 + 20$ und $54 + 5$ bzw. $65 - 10$ und $55 - 3$.

- Der eigentliche Zehnerübergang wird vorbereitet durch das Zehner-Auffüllen und das Zehner-Anbrechen, wie in den Aufgaben $60 - 4$ und $74 + 6$ erforderlich. Hier wird das Bündeln bzw. Entbündeln als separater Schritt herausgelöst.

- Danach wird der Zehnerübergang in zwei Schritten bis zwanzig besprochen, wie es in den Rechnungen $7 + 8$ und $13 - 6$ gefordert ist.

- Als nächstes wird das Rechnen mit einstelligem zweiten Operanden auf die Zahlen bis hundert ausgedehnt, wie es Aufgaben wie $36 + 9$ und $43 - 8$ erfordern.

- Schließlich werden Rechnungen der Art $54 + 27$ und $82 - 36$ besprochen, in der die einzelnen Bearbeitungsschritte der vorherigen Stufen nacheinander angewandt werden müssen.

Auf die solide Erarbeitung des Rechnens im Zahlbereich bis hundert muss in der zweiten Klasse großer Wert gelegt werden. Dies liefert die Grundlage für die Fortsetzung des Bündelungsprinzips auf höherwertigere Stellen in der dritten Klasse. Unser Zahlsystem kennt nicht nur einen Stellenübergang von zehn Einern zu einem Zehner, sondern es ergibt sich ein sukzessiver Fortgang. Immer zehn einer Stelle werden gebündelt zu einer Einheit der nächst höherwertigen Stelle. Hundert ist nicht die größte Zahl, die es gibt, sondern man kann es, wenn eine größere Zahl benötigt wird, im Prinzip immer weiter fortsetzen. Somit gibt es keine größte Zahl.

Meta-Einheiten

Es reicht nicht, herauszuarbeiten, dass sich das Bündelungsprinzip fortsetzt, denn dann werden Zahlen mit mehr als drei Stellen schnell unübersichtlich: 739261054 ist eine schlecht handhabbare lange Ziffernkette. Statt nun bei den höherwertigen Einheiten einfach weiterzumachen („Tausender, Zehntausender, Hunderttausender…“), kommt der Einheit Tausender eine besondere Rolle zu. Ab tausend wird von den Vielfachen der Tausender gesprochen: Einer, Zehner und Hunderter *von den Tausendern*. Der Tausender schlüpft damit in die Rolle einer *übergeordneten Einheit*. Fortgesetzt wird dies dann mit Einern, Zehnern und Hundertern von der Million etc. Immer drei Stellen werden gruppiert, in diesen gilt die Hierarchie „Einer, Zehner, Hunderter“ von den Meta-Einheiten Tausender, Millionen, Milliarden usw. Im Zahlsymbol wird dies gekennzeichnet entweder durch einen strukturierenden Punkt nach jeweils drei Ziffern oder durch eine Lücke: 123.456.789 bzw. 123 456 789. Schüler notieren in der Grundschule auf Karo-Papier, damit sind Punkte einfacher zu verschriften – doch auch eine Lücke ist mit etwas Mühe zu bewerkstelligen. Verzichten sollte man auf die Gruppierung jedenfalls nicht.[7] Eine sinnvolle Stellenwerttafel unter Berücksichtigung der Metaeinheiten sieht folgendermaßen aus:

Mio			**T**			**E**		
H	**Z**	**E**	**H**	**Z**	**E**	**H**	**Z**	**E**
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Der niederwertigste Dreierblock erhält konsequenterweise auch eine Meta-Einheit, dies ist der Einer. „Einer“ ist zwar kein Bestandteil des Zahlnamens, doch soll diese Tabelle keine schematische Vorlese-Hilfe sein, sondern das Prinzip der übergeordneten Einheiten abbilden – ein Dreierblock *ohne* eine übergeordnete Einheit macht für die Erklärung keinen Sinn, daher werden die Einer als Metaeinheit ergänzt.

7) Das Argument gegen die Verwendung des Punktes, im englischen Sprachraum trenne man Meta-Einheiten anders, ist damit zu entkräften, dass wir uns ja gerade im *deutschen* Sprachraum befinden. Der Wechsel der Sprache erfordert Übersetzungsleistungen: Will man sich englisch ausdrücken, muss man neben den Namen der Zahlen und Rechenoperationen eben auch die Notation der Zahlsymbole übersetzen.

Dimensionierte Größen

Eine wichtige Rolle spielt das Dezimalsystem beim Formulieren von und Rechnen mit Größenangaben wie Länge, Fläche, Volumen, Gewicht und Preis, insbesondere da bereits *vor* der Einführung von Bruchzahlen in der Sekundarstufe in der Grundschule Dezimalbrüche wie 1,2 km eingeführt werden. Eine Einbettung der Thematik dimensionierte Größen an dieser Stelle würde allerdings den Umfang des Textes sprengen und wird in einem separaten Artikel behandelt werden.

II. Erweiterungen in der Sekundarstufe

Dezimalbrüche

Eine stabile Vorstellung vom Zusammenhang der Stellenwerte – in die höherwertigere Richtung ist dies die Verzehnfachung der jeweiligen Einheit und umgekehrt in die niederwertigere Richtung ist dies das Teilen der Einheit durch zehn – erlaubt es, Dezimalbrüche einzuführen. Eine Erarbeitung der gemeinen Brüche und der Bruchdarstellung (Brüche sind Vielfache von Teilen der Eins) ist dafür notwendig und soll an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden.

Das Prinzip des Teilens des Stellenwertes durch zehn lässt sich über die Einheit eins hinaus fortsetzen. Das Teilen von eins in zehn Teile ergibt *ein Zehntel*, dies ist der Stellenwert der nächst niedrigeren Stelle, der Zehntelstelle. Eine Fortsetzung davon ergibt ein Hundertstel, ein Tausendstel usw. Im Zahlsymbol wird der ganzzahlige Teil von den Bruchteilen durch ein Komma getrennt. Werden drei Nachkommastellen überschritten, ist auch hier die optische Trennung der Meta-Einheiten Tausendstel, Millionstel etc. durch Punkt oder Leerraum sinnvoll.

Potenzdarstellung und Exponentialschreibweise

Die Stellenwerte sind eins, zehn und fortgesetzte Verzehnfachungen von zehn, also Zehnerpotenzen. Sie lassen sich auf kompaktere Weise in der Potenzschreibweise darstellen: $100 = 10 \cdot 10 = 10^2$, $1.000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$ usw. Die Potenzierung als Rechenart ist die fortgesetzte Multiplikation. Der Exponent (die Hochzahl) gibt die Anzahl der Faktoren der Basis (der Grundzahl) im Produkt an. Die sukzessive *Erhöhung* des Exponenten um eins ist gleichbedeutend mit der fortgesetzten *Multiplikation* mit der Basis zehn. Eine Million wird damit z. B. als 10^6 notiert.

Da ein Produkt „mit einem Faktor“ (oder gar „mit null Faktoren“) zunächst einen unsinnigen Term beschreibt, bedarf es, um auch 10 und 1 in Potenzschreibweise darstellen zu können, einer hilfsweisen Ergänzung des Produkts. Hierzu dient eins, das neutrale Element der Multiplikation. Dieser Faktor verändert den Wert eines Produkts nicht. Man fügt das neutrale Element zwei mal hinzu:

$$\begin{aligned} 1.000 &= 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 &&= 10^3 \\ 100 &= 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 &&= 10^2 \\ 10 &= 1 \cdot 1 \cdot 10 &&= 10^1 \\ 1 &= 1 \cdot 1 &&= 10^0 \end{aligned}$$

Auf diese Weise bleibt eine Produktdarstellung der Potenzterme erhalten und die beiden letzten Produkte enthalten einen bzw. keinen Faktor zehn.

Eine allgemeinere Erklärung betrachtet die Erhöhung des Exponenten in umgekehrter Weise. Die *Verringerung* des Exponenten um eins entspricht der *Division* des Produktterms durch zehn. Auf diese Weise lassen sich Einer und Zehner darstellen:

$$10 = (10 \cdot 10) : 10 = 10^{2-1} = 10^1 \text{ und } 1 = 10 : 10 = 10^{1-1} = 10^0.$$

Setzt man dies fort, erhält man für Zehnerbrüche negative Exponenten (s. u.).

Die Hochzahl gibt die Anzahl der Nullen an, 10^6 schreibt man mit sechs Nullen. Mathematischer ausgedrückt nennt der Exponent die Position der Ziffer im Stellenwertsystem, wenn man bei null anfängt zu nummerieren:

Stellenwert	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
Abkürzung	T	H	Z	E
Zahlenwert	1.000	100	10	1
Produktterm	$10 \cdot 10 \cdot 10$	$10 \cdot 10$	10	$10 : 10$
Potenznotation	10^3	10^2	10^1	10^0
Position	3	2	1	0

Eine Dezimalzahl lässt sich damit z. B. folgendermaßen aufgesplittet darstellen:

$$4.567 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

Die Verringerung des Exponenten lässt sich unter null fortsetzen. Ein Exponent von –1 bedeutet ein weiteres Teilen von eins in zehn Teile

$$10^{-1} = 10^{0-1} = 1 : 10 = \tfrac{1}{10}$$

und drückt damit ein Zehntel aus. Sukzessive erhält man durch weiteres Verringern des Exponenten Hundertstel, Tausendstel usw. Damit lässt sich die Notation in Potenzschreibweise auf die gebrochenen Stellenwerte fortsetzen:

$$123{,}456 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$$

Die Stellenwerttafel sieht in den Nachkommabereich fortgesetzt wie folgt aus:

Stellenwert	Einer	Zehntel	Hundertstel	Tausendstel
Abkürzung	E	z	h	t
Zahlenwert	1	0,1	0,01	0,001
Quotiententerm	1	$1 : 10$	$1 : 10 : 10$	$1 : 10 : 10 : 10$
Potenznotation	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
Position	0	–1	–2	–3

Sehr große bzw. sehr kleine Zahlen lassen sich mit der Exponentialschreibweise in der „wissenschaftlichen Darstellung“ als sog. Fließkommazahl darstellen. Dies vermeidet lange Zahlsymbole mit vielen Nullen.

$$1.230.000.000.000 = 1{,}23 \cdot 10^{12}$$
$$0{,}000.000.000.456 = 4{,}56 \cdot 10^{-10}$$

Die Grundzahl weist normiert eine (von null verschiedene Vorkommaziffer) auf. Der Exponent sagt formal, um wie viele Stellen man „das Komma verrücken“ muss – besser formuliert drückt er die Verschiebung im Stellenwertsystem aus. Oft benötigt man nicht alle Ziffern und kann damit übersichtlich gerundete Werte angeben.

Womöglich kennen Sie noch aus Ihrem Chemieunterricht die Avogadro-Konstante $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$, welche die Anzahl der Teilchen pro Mol angibt oder aus dem Physikunterricht die Plancksche Konstante $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js, die das Verhältnis von Energie und Frequenz eines Lichtteilchens beschreibt – Beispiele für sehr große bzw. kleine Zahlen, welche konventionell ausgeschrieben unübersichtlich wären.

Resümee

Ein mangelndes Begreifen des Dezimalsystems resultiert in ungenügender Kopfrechenkompetenz, was diesen Schülern einen einsichtigen und sicheren Umgang mit alltäglichen Quantitäten verwehrt. Das Erlangen lebenspraktischer arithmetischer Kenntnisse ist solchen Schülern damit verwehrt. Dies setzt sich fort im Scheitern beim Verstehen von Größen im gesamten weiteren Mathematikunterricht.

Es ist nicht damit getan, mit den Kindern die Mechanismen des Zehnerübergangs – sei es beim Kopfrechnen, sei es bei den schriftlichen Rechenverfahren – einzuüben. Vielmehr ist die Ausbildung eines stellenübergreifenden Zahlverständnisses nötig. Das Prinzip von Anzahl und Einheit, im Fall der Dezimalzahlen ausgedrückt am Ziffernwert und Stellenwert, muss verstanden sein. Durch die Verzehnfachung der Stellenwerte ist der Zusammenhang der Stellen festgelegt, was das Bündeln zu einer höherwertigeren und das Entbündeln zu einer niederwertigeren Einheit ermöglicht. *Dies* muss die kognitive Basis für das Kopfrechnen sein.

Der Autor

Dr. rer. nat. Michael Wehrmann

Institut für Mathematisches Lernen (IML)
Diagnostik/Lerntherapie bei Rechenschwäche

Wissenschaftliche Leitung

38100 Braunschweig, Steinweg 4
Tel. (0531) 12 16 - 77 50

E-Mail: wehrmann@iml-braunschweig.de
Internet: www.iml-braunschweig.de

Der Herausgeber

Zentrum für angewandte Lernforschung

Überregionaler Verbund unabhängiger Facheinrichtungen im Forschungsbereich der Rechenschwierigkeiten

Lerntherapeutenausbildung & Öffentlichkeitsarbeit

49074 Osnabrück, Kollegienwall 28 a/b
Tel. (0541) 20 23 - 98 02

E-Mail: arbeitskreis-lernforschung@t-online.de
Internet: www.arbeitskreis-lernforschung.de